النموذج اللوجستي: وجدنا سابقاً أن النموذج الأسي لا ينسجم مع الحالة الواقعية المدروسة. لأن $p(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$ وهذا غير مقبول رياضياً والسبب في ذلك يعود إلى أن الولادات والوفيات ليست عوامل كافية لتعطي رؤية واضحة عن سلوك العينة المدروسة هناك عوامل عديدة تلعب دوراً هاماً في نقص السكان ومن بين هذه العوامل: الغذاء

والسؤال المطروح ما هو الحد الرياضي الموافق لعامل الغذاء والذي يجب أن ندخله في نموذج النمو السكاني كي نحصل على نموذج يعطي رؤية معقولة عن الحالة المدروسة.

فلو النموذج الرياضي الناتج بعد ادخال عامل الغذاء بالنموذج اللوجستي وقد أجريت الدراسات لتوضح مدى مصداقية هذا النموذج.

نص النموذج: ينص النموذج اللوجستي على أن معدل تغير السكان يتناسب طرداً مع الحدين p و $(1-\frac{p}{M})$ حيث M ندعوه بقدرة البيئة على الاستيعاب. ويكون عندئذ النموذج اللوجستي هو

$$\frac{dp}{dt} = r\,p\left(1-\frac{p}{M}\right)$$

تعبر المعادلة التفاضلية عن النموذج اللوجستي في دراسة سكانية لعينة كانت وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى ويمكن حلها بعدة طرق أحد هذه الطرق فصل المتغيرات.

$$\frac{dp}{p(1-\frac{p}{M})} = r\,dt \Rightarrow \frac{p_0 M}{p_0+(M-p_0)e^{-rt}} = p(t)$$

تطبيق: لنفرض أن كائناً ما يوصف بالنموذج اللوجستي التالي.

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}008\,p\left(1-\frac{p}{1000}\right)$$

حيث $p_0 = 100$ وتقاس t بالسنوات.

والمطلوب أوجد [1] الحل التحليلي للنموذج المعطى.

[2] بين متى يصل عدد السكان إلى 900

[3] ادرس نقاط توازن النموذج.

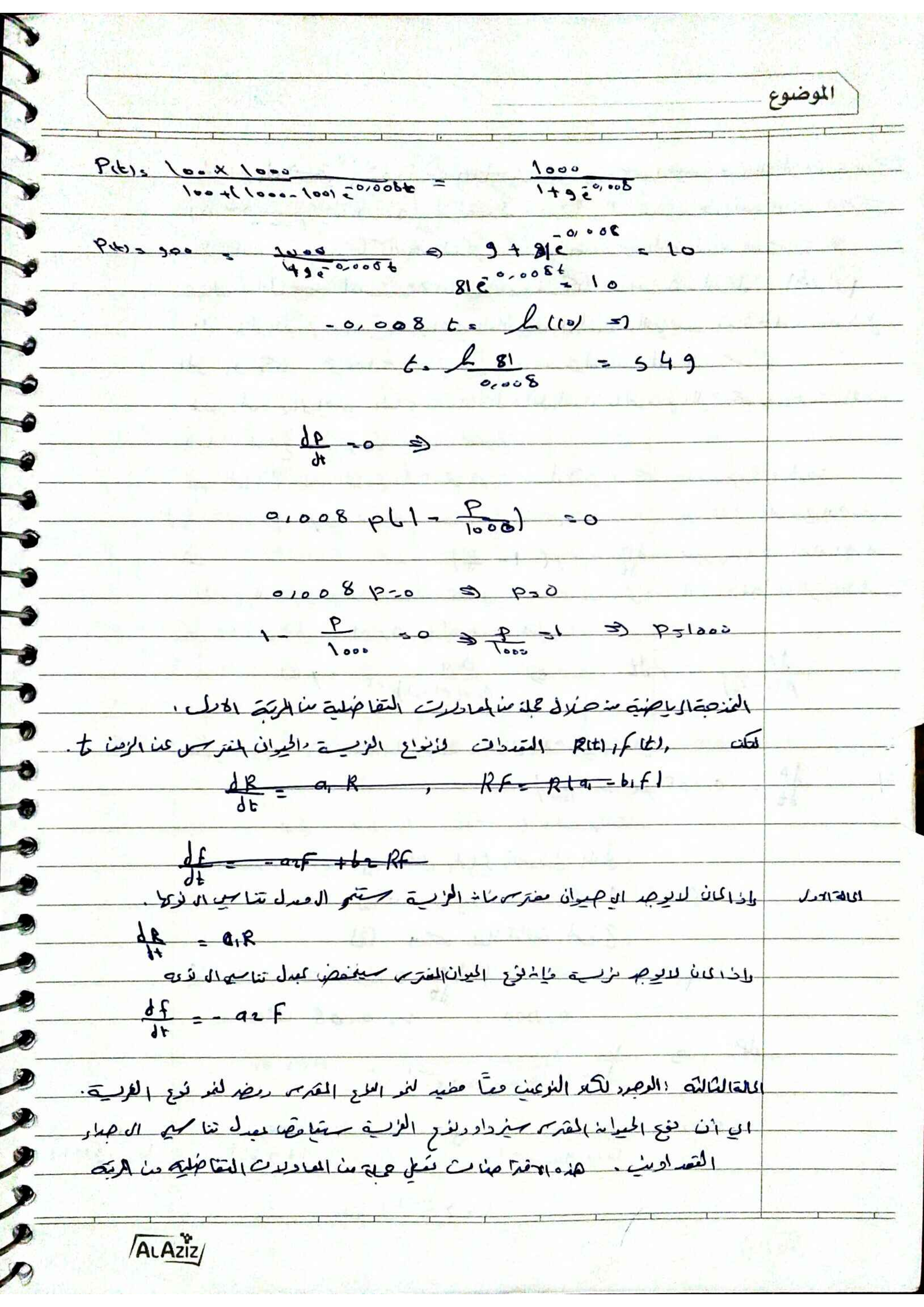
(ملاحظة لدراسة التوازن $\frac{dp}{dt}=0$) $\Leftarrow$ $p = c$

ملاحظة الحل $r = 0{,}008$ ، $M = 1000$

$$\Rightarrow \frac{100 \times 1000}{100+(1000-100)e^{-rt}} = p(t)$$

$$p(t) = \frac{100000}{100+900e^{-rt}} \Rightarrow = \frac{1000}{1+9e^{-rt}} = \frac{1000}{1+9e^{-0{,}008t}}$$

$$(1+9e^{-rt})\,p(t) = 1000$$



$$P(t) = \frac{100 \times 1000}{100 + (1000 - 100)e^{-0.008t}} = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.008}}$$

$$P(t) = 900 = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.008t}} \Rightarrow 9 + 81e^{-0.008} = 10$$

$$81e^{-0.008t} = 10$$

$$-0.008\, t = \ln(10) \Rightarrow$$

$$t = \frac{\ln 81}{0.008} = 549$$

$$\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$0.008\, P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) = 0$$

$$0.008\, P = 0 \Rightarrow P = 0$$

$$1 - \frac{P}{1000} = 0 \Rightarrow \frac{P}{1000} = 1 \Rightarrow P = 1000$$

النمذجة الرياضية من خلال جملة من المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى ،

لتكن $R(t), F(t)$, المتعدادات لأنواع الفريسة والحيوان المفترس عند الزمن t.

~~$\frac{dR}{dt} = a_1 R \quad , \quad RF = R(a_1 - b_1 F)$~~

~~$\frac{dF}{dt} = -a_2 F + b_2 RF$~~

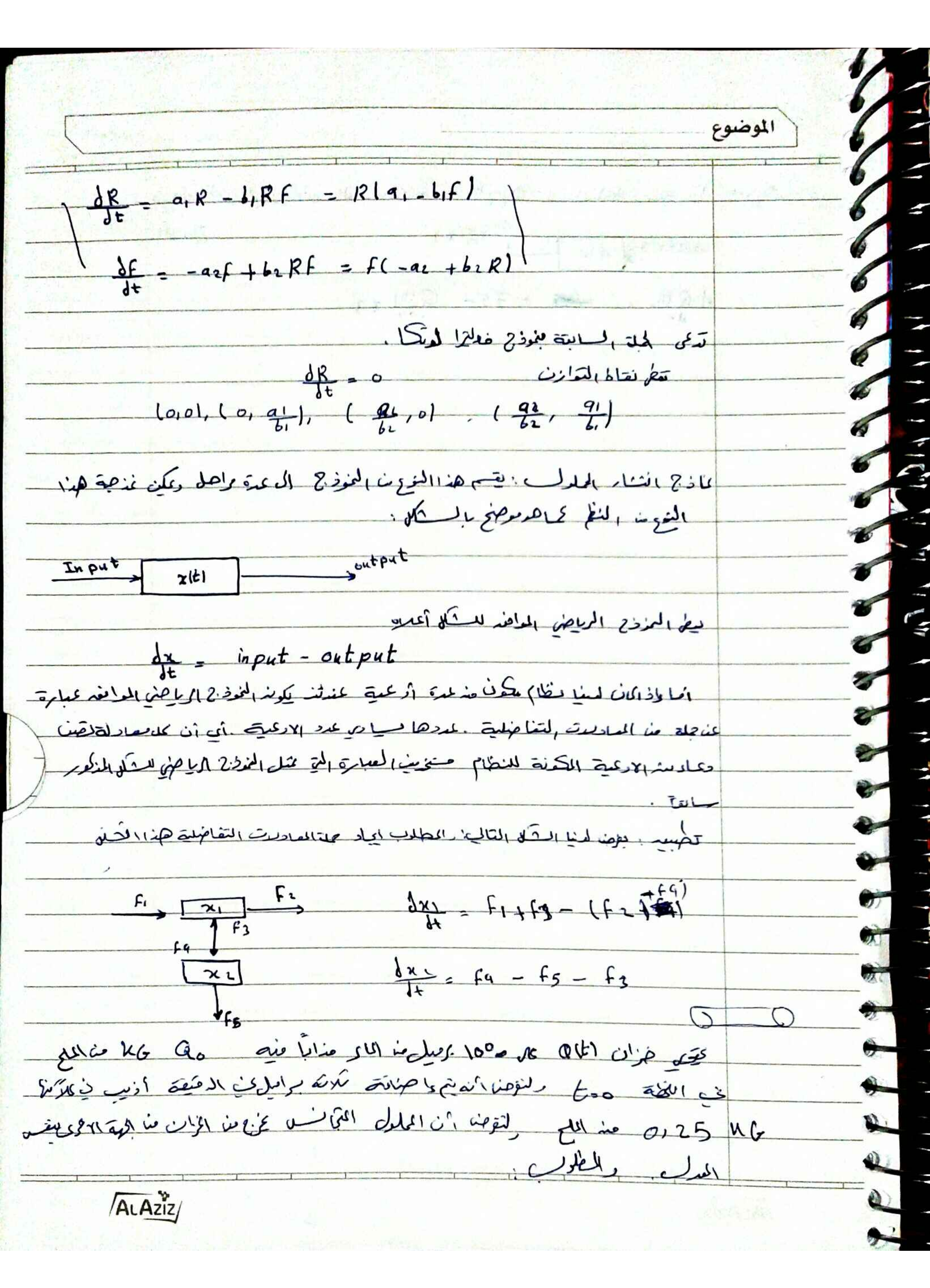
الحالة الاولى: واذا كان لا يوجد اي حيوان مفترس فان الفريسة ستنمو الى معدل تناسبي الى نوعها.

$$\frac{dR}{dt} = a_1 R$$

واذا كان لا يوجد فريسة فان نوع الحيوان المفترس سينخفض بمعدل تناسبي الى نوعه

$$\frac{dF}{dt} = -a_2 F$$

الحالة الثالثة: الوجود لكلا النوعين معاً مفيد لنمو النوع المفترس ومضر لنمو نوع الفريسة.
اي أن نوع الحيوان المفترس سيزداد ونوع الفريسة ستتناقص بمعدل تناسبي الى جداء التعداديين . هذه الافتراضات تشكل جملة من المعادلات التفاضلية من الرتبة



الموضوع

$$\frac{dR}{dt} = a_1 R - b_1 R F = R(a_1 - b_1 F)$$

$$\frac{dF}{dt} = -a_2 F + b_2 R F = F(-a_2 + b_2 R)$$

تدعى الجملة السابقة بنموذج فولتيرا لوتكا.

نقاط التوازن $\frac{dR}{dt} = 0$

$(0,0), \left(0, \frac{a_1}{b_1}\right), \left(\frac{a_2}{b_2}, 0\right), \left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right)$

نماذج انتشار الملوث: يقسم هذا النوع من النموذج الى عدة مراحل ويمكن نمذجة هذا النوع من النظم كما هو موضح بالشكل:

يعطى النموذج الرياضي الموافق للشكل أعلاه

$$\frac{dx}{dt} = input - output$$

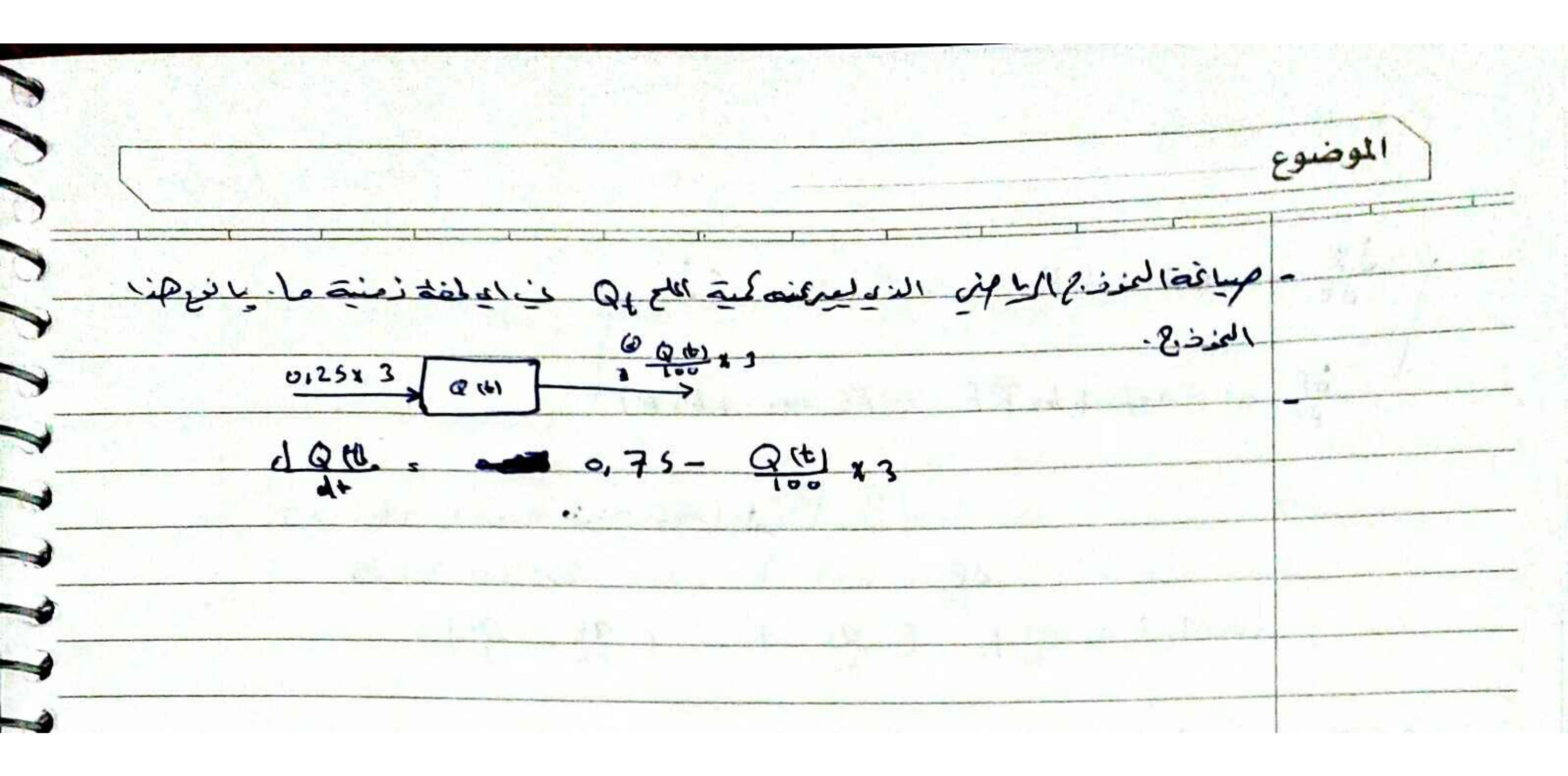
أما إذا كان لدينا نظام مكون من عدة أوعية عندئذ يكون النموذج الرياضي الموافق عبارة عن جملة من المعادلات التفاضلية عددها يساوي عدد الاوعية. أي أن كل معادلة تصف معادلة الاوعية المكونة للنظام ستعطينا العبارة التي تمثل النموذج الرياضي للشكل المذكور سابقاً.

تطبيق: يعرض لدينا الشكل التالي، المطلوب إيجاد جملة المعادلات التفاضلية لهذا الشكل

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1 + f_3 - (f_2 + f_4)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_4 - f_5 - f_3$$

يحتوي خزان Q(t) على 100 برميل من الماء مذاباً فيه Q_0 KG من الملح في اللحظة $t=0$ ولنفرض أنه يتم إضافة ثلاثة براميل في الدقيقة أذيب في كل منها 0,25 KG من الملح، لنفرض أن المحلول المتجانس يخرج من الخزان من الجهة الأخرى بنفس المعدل. والمطلوب:



الموضوع

- صياغة النموذج الرياضي الذي يعبر عنه كمية الملح Q_t في اي لحظة زمنية ما. ما نوع هذا النموذج.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \text{[redacted]}\ 0{,}75 - \frac{Q(t)}{100} \times 3$$